

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ

ETAPA LOCALĂ 24.02.2023

CLASA a XII-a

Problema I. (7 puncte)

Pe mulțimea $M = [0,2]$ se definește legea de compoziție asociativă $x * y = xy - x - y + 2, \forall x, y \in M$.

a) Determinați elementele simetrizabile din M .

b) Calculați $\frac{1}{2} * \frac{1}{3} * \dots * \frac{1}{2023}$.

prof. Anca Cristina Hodorogea, ISJ CLUJ

Problema II. (7 puncte)

Determinați numerele reale $a \in (0, \pi)$ pentru care are loc egalitatea $\int_0^a (\sin x + \sqrt{3} \cos x) dx = 1 + \sqrt{2}$.

S:L22.311, Supliment GM nr. 11/2022

Problema III. (7 puncte)

Să se determine $n \in \mathbb{N}$, astfel încât $I_n \in \mathbb{Q}$, unde $I_n = \int_0^1 \frac{6x^3 - 9x^2 + 7x - 2}{(3x^2 - 3x + 2)^n} dx$

prof. Jecan Eugen, Colegiul Național Andrei Mureșanu Dej

Problema IV. (7 puncte)

Determinați funcțiile derivabile $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ pentru care $f(0) = g(0) = 0$ și:

$$f(x)f'(x) + g(x)g'(x) = -f^2(x)g(x)g'(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

prof. Mădălin Mitrofan, Colegiul Național Emil Racoviță Cluj-Napoca

Toate subiectele sunt obligatorii.
Timp efectiv de lucru - 3 ore.

SUCCES!